**Решение задач математического программирования**

**в процессе обучения на Python**

Ivan Brezina[[1]](#footnote-1), Juraj Pekár[[2]](#footnote-2), Jaroslav Kultan[[3]](#footnote-3)

**Абстракт**

Для моделирования и оптимизации любой системы, описанной с помощью функций и уравнений или неравенств, можно эффективно использовать модели математического программирования. Их цель - найти экстремум целевой функции при заданных ограничениях, описываемых системой неравенств или равенств, обычно линейных. Для обучения задачам математического программирования можно использовать различные программные продукты. Частным случаем математического программирования, но наиболее часто применяемым на практике, являются модели линейного программирования, в которых целевая функция и все ограничения являются линейными. Именно на этот тип задач ориентировано большое количество программных продуктов, позволяющих понять их построение, решение и интерпретацию. На Факультете бизнес-информатики Экономического университета в Братиславе в учебном процессе используются различные программные продукты, такие как MS Excel (для решения задач математического и, соответственно, линейного программирования), POM-QM for Windows (для решения различных моделей операционных исследований, включая линейное программирование), Simplex V4 (для понимания сути графического и численного решения задач линейного программирования), а также решение задач математического (и, следовательно, снова линейного) программирования использует язык Python.

**Ключевые слова**

математическое программирование, линейное программирование, Python, MS Excel, POM-QM для Windows, Simplex V4

JEL classification C61, C63

Solving problems of mathematical programming

in Python in the teaching process

Ivan Brezina, Juraj Pekár, Jaroslav Kultan

**Abstract**

Mathematical programming models can be effectively used to model and optimize any system described using functions and equations or inequalities. Their goal is to find the extremum of the objective function under given constraints described by a system of inequalities or equalities, usually linear. Various software products can be used to teach mathematical programming tasks. A special case of mathematical programming, but the most frequently used in practice, are linear programming models, in which the objective function and all constraints are linear. It is for this type of tasks that a large number of software products are oriented, which make it possible to understand their construction, solution and interpretation. At the Faculty of Business Informatics of the University of Economics in Bratislava, various software products are used in the educational process, such as MS Excel (for solving problems of mathematical and, accordingly, linear programming), POM-QM for Windows (for solving various models of operational research, including linear programming ), Simplex V4 (for understanding the essence of graphical and numerical solving problems of linear programming), as well as solving problems of mathematical (and, therefore, again linear) programming uses the Python language.

**Keywords**

mathematical programming, linear programming, Python, MS Excel, POM-QM for Windows, Simplex V4

**JEL classification** C61, C63

**Вступление**

Математические модели представляют собой упрощенное описание реальной системы. В целом, модели и методы математического программирования являются одними из самых широко используемых. Модели математического программирования позволяют относительно легко преобразовывать реальные процессы в математические модели в форме функций, неравенств или уравнений. Это относительно точная количественная оценка выбора конкретного решения из большого количества возможных решений, которое является лучшим с точки зрения математически сформулированной цели

1. **Задачи математического программирования**

Каждая задача математического программирования создана с целью моделировать такую реальность, для которой характерен поиск наилучшего решения при ограничивающих предположениях. Если все отношения в модели математического программирования линейны, это модель линейного программирования (МЛП).

Для общей записи модели математического программирования введем обозначения:

*n* - число решающих переменных,

*m* - количество граничных условий (структурных ограничений),

*k* - количество целевых функций, описывающих цели оптимизации,

*xj* – решающее переменные j = 1, 2, ... *n*,

*fs* - действительные функции решающих переменных *x*1,*x*2, ... *xn*,  *s* = 1, 2, ...*k*,

*gi* - действительные функции решающих переменных *x*1, *x*2, ...*xn*, *i* = 1, 2, ...*m*,*,* которые описывают ограничивающее условия,

*Dj* - области значений, которые могут принимать решающее переменные *xj*, *j* = 1, 2, ...*n*.

Математическую модель программирования (ММП) можно записать в общем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Целевые функции (преследуемые цели) |
|  | Условия принятия решения (структурные ограничения) |
|  | Неотрицательные условия |
|  | Диапазон значений переменных |

Модели математического программирования в зависимости от типа целевых функций и структурных условий решения можно разделить на модели линейного программирования (если все функции линейны) или модели нелинейного программирования (если хотя бы одна из функций или структурных ограничений является нелинейной).

Методы, которые были разработаны в рамках теории линейного программирования для решения впоследствии определенных задач линейного программирования, относительно просты по своей математической структуре и в то же время могут использоваться для решения большого количества различных задач. В общем, наиболее часто используемый метод решения МЛП - это симплексный метод с его модификациями. Методы внутренней точки основаны на другом принципе (например, эллипсоидальный метод, метод Кармаркара, основанный на эллипсоидальном методе, сферические методы ...).

1. **Программное решение задач математического программирования.**

Реальные решения задач математического программирования обычно требуют много времени. Профессиональные программные продукты, такие как GAMS, LINDO, LINGO, Python, Gurobi и т. п., были разработаны для решения практических задач. В процессе обучения лучше применять такие средства и инструменты, которые позволяют студенту анализировать отдельные шаги решения, а также и их графическую интерпретацию. Программное обеспечение также используется мировыми авторами при обучении математическому программированию (Anderson, Sweeney, Williams, Camm, & Cochran, 2018, Stevenson, & Sum, 2014, Таhа, 2011 и др.).

Но на практике, даже в академических кругах, для решения математического программирования используются многие другие программы и программные языки (например, MATLAB, язык R, Python и т. п.). Далее мы представим способ решения задачи математического программирования в наиболее доступном программном продукте MS Excel и на Python. Программный пакет POM-QM для Windows и недавно разработанный инструмент линейного программирования Simplex V4 используются в учебном процессе на Факультете бизнес-информатики Экономического университета в Братиславе для решения задач линейного программирования как наиболее часто используемых задач математического программирования.

1. **Решение задач математического программирования в MS Excel.**

При обучении математическому программированию (а значит, и линейному программированию) можно использовать общедоступный программный продукт MS Excel, применив оптимизирующий аддитивный решатель.

Чтобы решить задачу математического программирования в электронной таблице, сначала необходимо подготовить входные данные в соответствии с определенными правилами (Brezina, Pekár, & Reiff, 2020), как того требует приложение по оптимизации (Solver, Решател). После определения блока для переменных решения (Brezina, Pekár, & Reiff, 2020) можно снова записать отдельные условия ограничения в Решателе на основе правил записи в Решателе, для которых необходимо вычислить скалярное произведение. Последний шаг в подготовке входных данных - определение положения критерия оптимизации (целевой функции).

После завершения подготовки входных данных можно активировать собственное дополнение для оптимизации – Solver (Решател). После его запуска (Data - Solver) пользователю предлагается диалоговое окно «Параметры надстройки Solver» для ввода параметров решаемой задачи.

В конце расчета отображается диалоговое окно, в котором предоставляется информация о том, найдено ли решение, удовлетворяющее всем граничным условиям (оптимальное решение).

* 1. **Решение задач линейного программирования в MS Excel, POM-QM для Windows и Simplex V4**

Как уже упоминалось, для решения задач линейного программирования могут использоваться различные программные продукты как для наиболее часто используемых задач в математическом программировании. На факультете бизнес-информатики Экономического университета в Братиславе, помимо MS Excel, в учебном процессе используется программный пакет POM-QM for Windows а также недавно разработанный инструмент для обучения линейному программированию Simplex V4.

Для обучения решению задач линейного программирования является вполне хорошим инструментом свободно доступный продукт POM-QM для Windows (также известный как POM для Windows или QM для Windows). POM-QM для Windows - это удобный программный комплекс, предназначенный для решения задач в области управления производством, управления операциями, количественных методов, операционного вычисления и задач из области управления. POM-QM для Windows был разработан таким образом, чтобы помочь студентам лучше понять задачи из области операционного вычисления. Программное обеспечение можно использовать либо непосредственно для решения задач, либо для проверки ответов, которые были решены вручную. POM-QM для Windows содержит относительно большое количество модулей, соответствующих отдельным областям операционного исследования, таких как модуль теории игр, линейного программирования, целевого программирования, целочисленного и смешанного программирования, инвентаризации, обслуживания, расчета расписания цеха, сетевого анализа, цепей Маркова, управление проектами и др.

Преимущество POM-QM для Windows в решении задач линейного программирования заключается в том, что он предоставляет, помимо прочего, графическое решение МЛП, а также возможность отслеживать отдельные итерационные шаги симплекс-метода, анализа чувствительности, проектирования и решения двойных задач, а также указывает на альтернативные решения. Однако существенным недостатком является то, что он предоставляет результаты в виде десятичных чисел, а также то, что численное решение неверно в некоторых особых случаях. В графическом решении он не дает возможности легко объяснить основные концепции линейного программирования, такие как базовое решение, допустимое базовое решение и тому подобное.

Для нужд учебного процесса в области линейного программирования в рамках сотрудничества выбранных университетов V4 была разработана программа Simplex V4, которая ориентирована на представление основных операций изменения элементарной базы в форме дробей. Эта программа также позволяет отслеживать графическое решение МЛП и особенно интерпретировать базовые концепции линейного программирования, такие как базовое решение, базовое допустимое решение, выбор ведущего элемента.

**4. Решение задач математического программирования на Python**

Указанные выше программные продукты используются в основном для базовых курсов исследования операций (бакалавриат), а их главным преимуществом является простота работы, графическая интерпретация результатов. Проблемой можно считать ограничение размера задачи, скорость решения и плохую юзабилити при решении практических задач. По этой причине при обучении в высших курсах основное внимание уделяется программному обеспечению, например. GAMS, Gurobi, Python. С точки зрения распространенности на практике преподаватели уделяют особое внимание языку Python, который в настоящее время является очень популярным программным инструментом.

При решении задач на языке Pythone в первую очередь необходимо определить среду программирования (этот вопрос не является предметом статьи). В дополнение к базовой IDLE (интегрированной среде разработки и обучения) можно использовать такие инструменты, как Jupyter и Spyder, которые можно найти в интегрированной системе Anaconda.

Далее мы представим решение задачи линейного программирования (как подмножество задач математического программирования) в среде IDLE.

Следующим шагом является выбор подходящего модуля, предназначенного для решения задач математического программирования в целом. Два основных модуля, SCIPY и MIP, доступны для практического решения. Первый модуль предназначен для решения задач математического программирования (линейных и нелинейных задач). В отличие от модуля SCIPY, модуль MIP ориентирован на решение задач линейного, целочисленного и бивалентного программирования. Изменчивость модуля MIP может быть охарактеризована возможностью выбора решателя оптимизации Coin-or Branch and Cut (CBC), который автоматически устанавливается вместе с модулем MIP, Gurobi (GRB), SCIP, GLPK, который можно использовать, если он установлен из источников, отличных от Python.

Далее будет представлен пример решения задачи линейного программирования как частного случая задачи математического программирования. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:



Ниже приведен код (# - представляет комментарий в Python) для решения проблемы в Python с использованием модуля MIP:

# импортировать элементы из модуля MIP

из mip импорт модели, xsum, максимизировать

# входные данные

c = [10, 13]

A = [[20, 15],[3,7],[0,6]]

b=[100,120,20]

n, V = len(c), set(range(len(c)))

m, U = len(b), set(range(len(b)))

md = Model('ULP')

# определение переменных

x = [md.add\_var(var\_type="C") for i in V]

# целевая функция

md.objective = maximize(xsum(c[i] \* x[i] for i in V))

# ограничения задачи

for i in U:

 md += xsum(A[i][j]\* x[j] for j in V) <= b[i]

# начало решения

vysledok=md.optimize()

# vypis vysledkov

for i in md.vars:

 print(i.name,i.x)

print(результат)

print("Целевая функция: ",md.objective\_value)

Отображение, cписок результатов после запуска в среде IDLE:

var(0) 2.5

var(1) 3.3333333333333335

OptimizationStatus.OPTIMAL

Целевая функция: 68.33333333333334

1. **Вывод**

Статья была создана как презентация возможностей обучения решению задач математического программирования как наиболее распространенной дисциплины операционных исследований, а также в рамках обучения задачам линейного программирования как наиболее часто используемых задач в математическом программировании.

В статье представлены 4 программных продукта, которые в настоящее время используются при обучении линейному программированию в Экономическом университете в Братиславе, а профессиональное программное обеспечение используется для решения исследовательских задач, особенно GAMS, MATLAB и т.п. Преимущества каждого представленного программного обеспечения можно проанализировать на основе целей, которые преследуются в обучении.

Целью было не описать процедуру поиска подходящего решения проблемы математического программирования и оценить пригодность отдельных программных продуктов (Brezina, Pekár, & Reiff, 2020), но в особенности представить возможности использования Python для решения проблемы математического программирования а также проблемы линейного программирования. Очевидно, что Python предоставляет относительно простую командную процедуру для поиска оптимального решения (если оно есть) как для задач математического, так и для линейного программирования.

При использовании надстройки Solver под MS Excel основным преимуществом является ее доступность, но она не подходит в качестве педагогического пособия для объяснения сути симплекс-метода. Соответствующая графическая интерпретация также недоступна в этой надстройке MS Excel. Программный пакет POM-QM for Windows подходит для базового обучения, но его недостатком является расчет с десятичными числами, что снижает его числовую точность. Программа Simplex V4 была создана как дополнение к существующей программе с целью графической и числовой интерпретации отдельных шагов решения МЛП с использованием симплекс-метода. Это позволяет студентам работать независимо со знанием процесса решения без сложных численных расчетов.

В отличие от предыдущего программного обеспечения, Python позволяет решать обширные задачи математического программирования. Особенно подходит для студентов высших курсов, так как предполагает знание основ программирования. Однако, в отличие от других инструментов, он сильно варьируется, например знание работы с графическими модулями позволяет графически отображать задачу.

**This work was supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA grant no. 1/0339/20 „ Hidden Markov Model Utilization in Financial Modeling “.**

**This work was supported by the Grant Agency of Slovak Republic – KEGA grant no. 019EU-4/2020 Support of distance education through a virtual department**

**Список литературы**

1. Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camm, J. D. & Cochran, J. J. (2018). *An introduction to management science: quantitative approach*. Cengage learning.

1. [Betteridge](https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0039914085801752?via%3Dihub" \l "!), D. [Wade](https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0039914085801752?via%3Dihub#!), A.P. & [Howard](https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0039914085801752?via%3Dihub#!), A.G. (1985). *Reflections on the modified simplex I., II*. Talanta, Volume 32, Issue 8, pp. 709-734.
2. Brezina, I. &Pekár, J. (2019). *Úvod do operačného výskumu I*. Bratislava: LetraEdu.
3. Brezina, I., Pekár, J. & Reiff, M. (2020). *Alternatívne programové produkty na výučbu lineárneho programovania*. Ekonomika a informatika, Volume 18, Issue 1, pp. 25-38.
4. GAMS (General Algebraic Modeling System) (https://www.gams.com/).
5. Jablonský, J. (2002). *Operační výzkum*. Praha: Professional Publishing.
6. Stevenson, W. J., & Sum, C. C. (2014). *Operations management* (Vol. 10). New York, NY: McGraw-Hill/Irwin.
7. Taha, H. A. (2011). *Operations research: an introduction* (Vol. 790). Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson/Prentice Hall.
8. Weiss, H. J. (2009). POM-QM for Windows: including POM for Windows and QM for Windows.
1. Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Dolnozemská cesta 1/b, 852 35 Bratislava, ivan.brezina@euba.sk. [↑](#footnote-ref-1)
2. Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Dolnozemská cesta 1/b, 852 35 Bratislava, juraj.pekar@euba.sk. [↑](#footnote-ref-2)
3. Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra aplikovanej informatiky, Dolnozemská cesta 1/b, 852 35 Bratislava, jaroslav.kultan@euba.sk. [↑](#footnote-ref-3)